Processamento de Malhas Poligonais

Tópicos Avançados em Computação Visual e Interfaces I

Prof.: Anselmo Montenegro e Marcos Lage

www.ic.uff.br/~anselmo

anselmo@ic.uff.br

www.ic.uff.br/~mlage

mlage@ic.uff.br

Conteúdo: Notas de Aula

Remalhamento

Introdução

Remalhamento

Introdução

Dada uma malha 3D,
o processo de remalhamento consiste em calcular uma nova malha tal que:

a) Os elementos da nova malha satisfazem algum critério de qualidade.
b) A nova malha aproxima o dado de entrada satisfatoriamente.

Remalhamento

Introdução

Dada uma malha 3D,
o processo de remalhamento consiste em calcular uma nova malha tal que:

a) Os elementos da nova malha satisfazem algum critério de qualidade.
b) A nova malha aproxima o dado de entrada satisfatoriamente.

Obs:

Usualmente assumimos que a entrada de um algoritmo de remalhamento é uma variedade. Se a malha for uma não variedade, fazemos um pré-processamento.

Remalhamento

Introdução

Sendo assim, os critérios de qualidade que levaremos em conta não são topológicos

Ex:

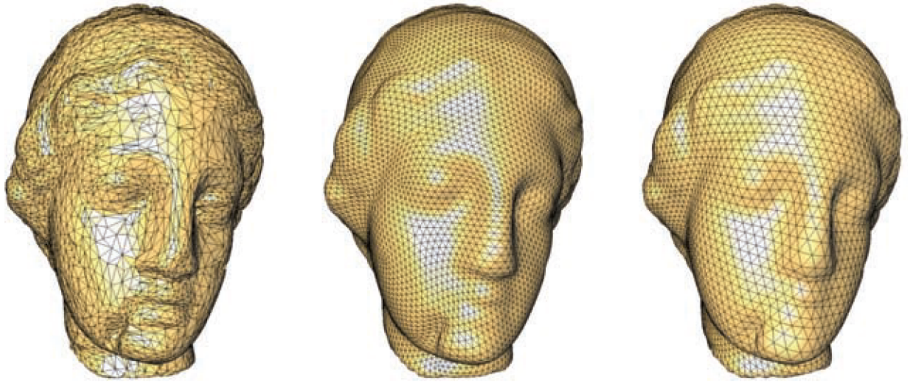
Densidade da amostragem,
Regularidade,
Tamanho,
Alinhamento,
Forma dos elementos.

Remalhamento

Introdução

Sendo assim, os critérios de qualidade que levaremos em conta não são topológicos

Ex:
Densidade da amostragem,
Regularidade,
Tamanho,
Alinhamento,
Forma dos elementos.



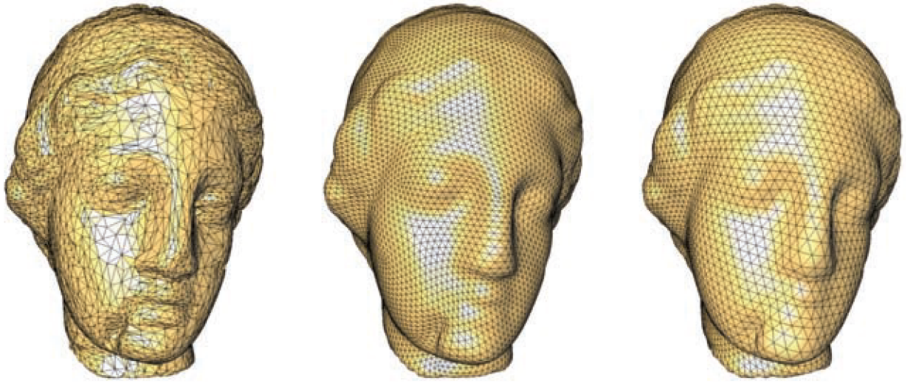
Remalhamento

Introdução

Sendo assim, os critérios de qualidade que levaremos em conta não são topológicos

Ex:

Densidade da amostragem,
Regularidade,
Tamanho,
Alinhamento,
Forma dos elementos.



Dividiremos estes critérios sob dois aspectos: Estrutura Local e Global.

Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Tipo de elemento:

Os tipos de elemento alvo mais comuns em algoritmos de remalhamento são quadrângulos e triângulos.

Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Tipo de elemento:

Os tipos de elemento alvo mais comuns em algoritmos de remalhamento são quadrângulos e triângulos.

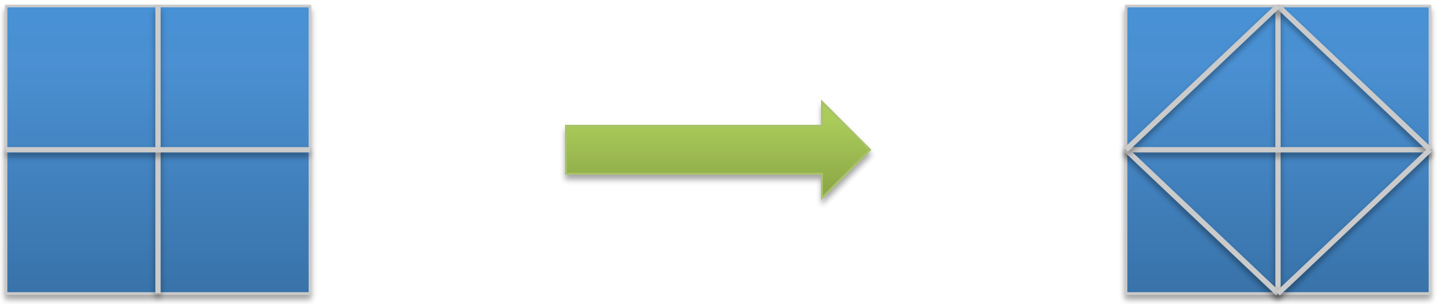
Triângulos: Mais fáceis de produzir.
Quadrângulos: Usualmente os algoritmos geram malhas quad-dominantes.

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Tipo de elemento:

Observe que é fácil converter malhas de triângulos em quadrângulos e vice versa.



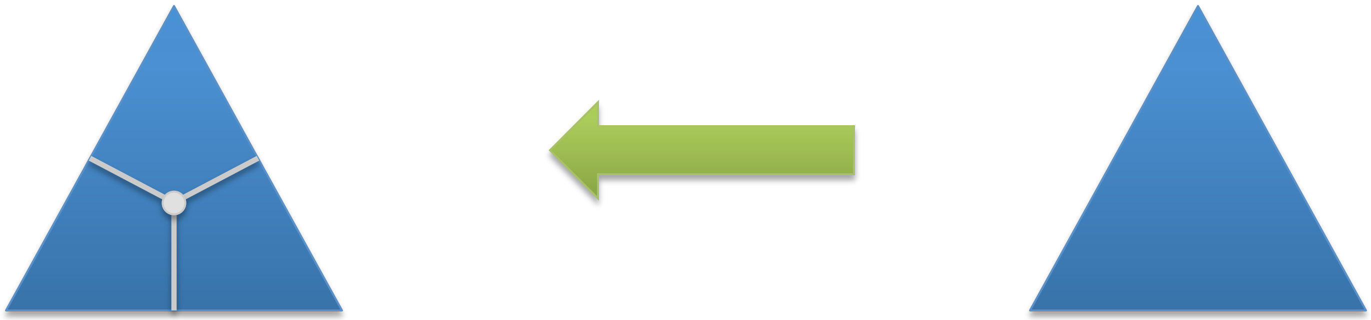
Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Tipo de elemento:

Observe que é fácil converter malhas de triângulos em quadrângulos e vice versa.



Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Forma do elemento:

Elementos podem ser classificados quanto a sua isotropia.

Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Forma do elemento:

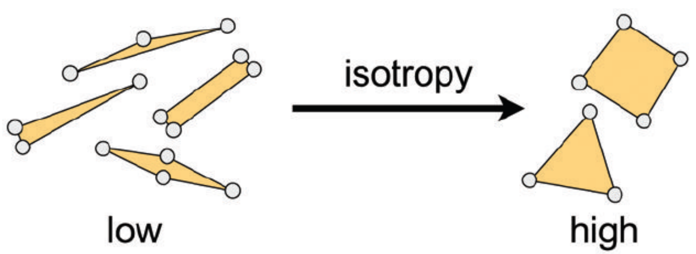
Elementos podem ser classificados quanto a sua isotropia.
A forma de elementos isotrópicos é uniforme em todas as direções.

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Forma do elemento:

Elementos podem ser classificados quanto a sua isotropia.
A forma de elementos isotrópicos é uniforme em todas as direções.



Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Forma do elemento:

Elementos podem ser classificados quanto a sua isotropia.
A forma de elementos isotrópicos é uniforme em todas as direções.

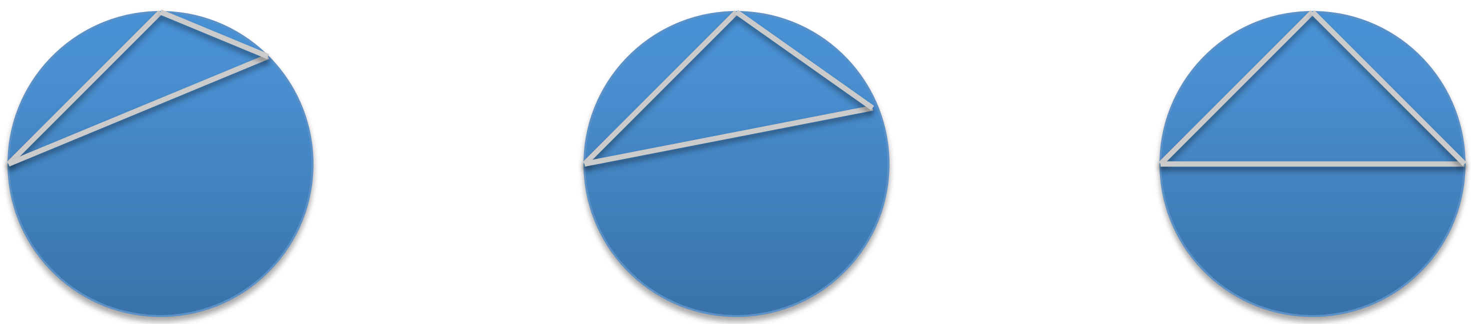
Idealmente, um triângulo / quadrângulo é isotrópico se é próximo de um triângulo equilátero / quadrado.

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Forma do elemento:

Podemos medir a isotropia através da razão entre o raio do círculo circunscrito ao elemento e a menor aresta do elemento.



Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Densidade de Elementos:

Uma distribuição uniforme de elementos acontece quando os elementos estão igualmente distribuídos sobre todo o modelo.

Remalhamento

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Densidade de Elementos:

Uma distribuição uniforme de elementos acontece quando os elementos estão igualmente distribuídos sobre todo o modelo.

Uma distribuição não-uniforme ou adaptativa acontece quando número de elementos varia de acordo com a região.

Ex: Quando maior a curvatura, menores os elementos e maior a sua quantidade.

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Alinhamento e orientação:

Converter uma malha em outra pode ser visto como um processo de re-amostragem.

Estrutura Local

A estrutura local de uma malha é descrita pelo tipo, forma, orientação e distribuição dos elementos da malha.

Alinhamento e orientação:

Converter uma malha em outra pode ser visto como um processo de re-amostragem.

Detalhes (sharp features) devem estar alinhados com os elementos para evitar distorções na malha resultante.

Remalhamento

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Remalhamento

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Vértice Regular:

Em uma malha de triângulos, um vértice regular é aquele cuja valência é 6 ou 4 quando este é de interior e de bordo, respectivamente.

Remalhamento

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Vértice Regular:

Em uma malha de triângulos, um vértice regular é aquele cuja valência é 6 ou 4 quando este é de interior e de bordo, respectivamente.

No caso de malhas de quadrângulos, vértices regulares tem valência 4 e 3 quando são de interior e de bordo, respectivamente.

Remalhamento

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Vértice Regular:

Em uma malha de triângulos, um vértice regular é aquele cuja valência é 6 ou 4 quando este é de interior e de bordo, respectivamente.

No caso de malhas de quadrângulos, vértices regulares tem valência 4 e 3 quando são de interior e de bordo, respectivamente.

Quando um vértice não é regular ele é dito extraordinário.

Remalhamento

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Malha Irregular:

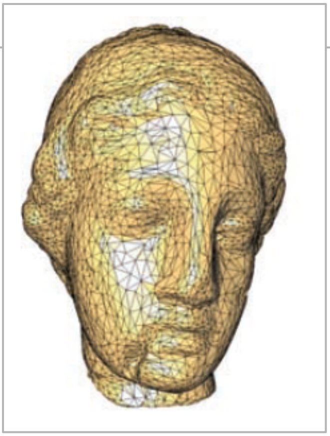
Uma malha é irregular se seus vértices não apresentam nenhum tipo de regularidade no que diz respeito à conectividade.

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Malha Irregular:

Uma malha é irregular se seus vértices não apresentam nenhum tipo de regularidade no que diz respeito à conectividade.



Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Malha Semiregular:

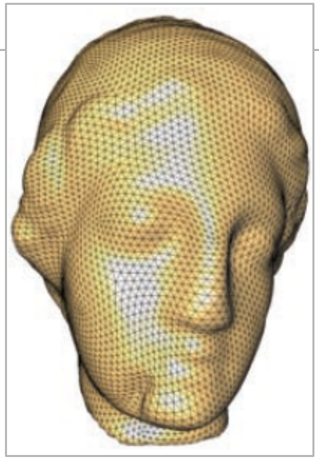
Malhas provenientes de processos de subdivisão. O número de vértices extraordinários e pequeno e constante.

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Malha Semiregular:

Malhas provenientes de processos de subdivisão. O número de vértices extraordinários e pequeno e constante.



Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Malha altamente regular:

Malhas cuja maioria dos vértices é regular. Não são provenientes de processos de subdivisão.

Remalhamento

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

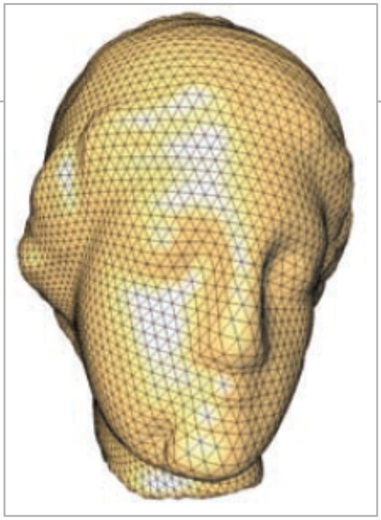
Malha regular:

Malhas cujos vértices são regulares.

Estrutura Global

A estrutura global de uma malha é classificada como irregular, semiregular, regular e altamente regular de acordo com a valência dos vértices da malha.

Malha regular:

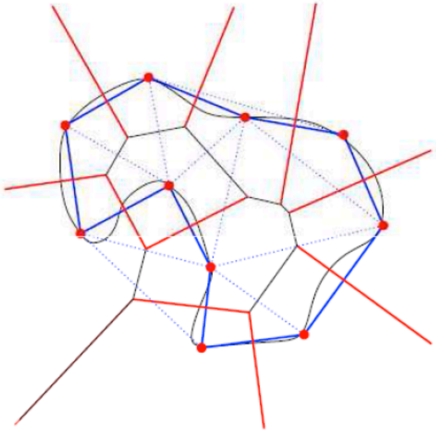


Malhas cujos vértices são regulares.

Remalhamento

Remalhamento isotrópico

Baseado nos conceitos de triangulação de Delaunay $Del(P)$, triangulação de Delaunay Restrita $Del_{|S}(P)$ e diagrama de Voronoi $Vor(P)$ onde S é a superfície original e P são pontos em S



(2D)

Remalhamento

Diagrama de Voronoi Vor(P)

Seja P = $\{p_1,\dots,p_n\}$ um conjunto de pontos no R^d.
Associamos a cada sítio p_i sua região de Voronoi $V(p_i)$ tal que:

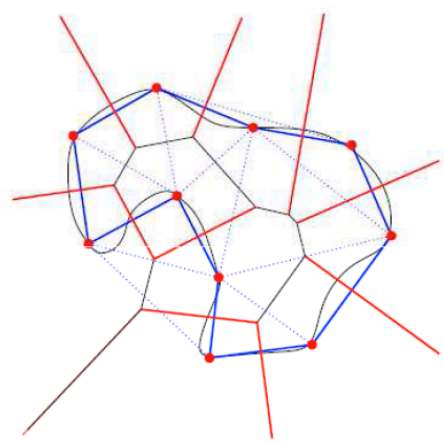
$$V(p_i) = \{x \in R^d : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j \neq i\}$$

A coleção das regiões não vazias de Voronoi, juntamente com suas faces e relações de incidência determinam um complexo celular denominado diagrama de Voronoi Vor (P)

O Diagrama de Voronoi determina uma partição do R^d

Diagrama de Voronoi Vor(P)

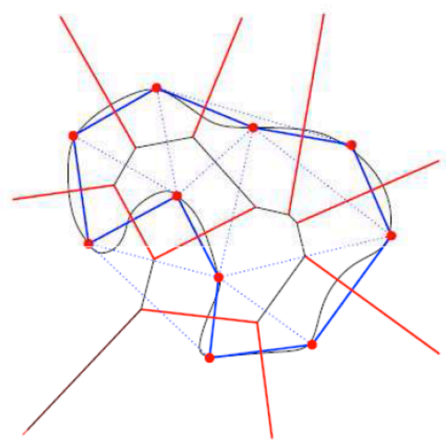
- Lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois sítios pi e pj é denominado bissetor
  - Todos os bissetores são subespaços afins do R^d (retas em 1D e planos em 3D)
- Uma célula de Voronoi é a interseção de subespaços afins fechados limitados por bissetores



(2D)

Diagrama de Voronoi Vor(P)

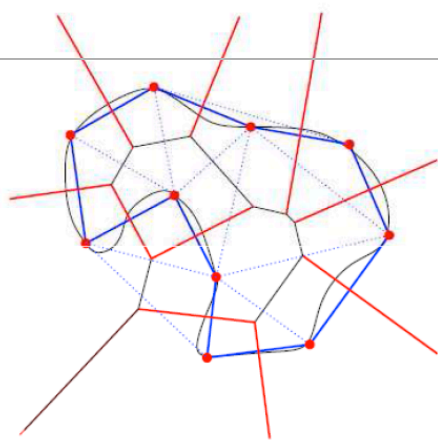
- Células de Voronoi são convexas
- Células de Voronoi podem ser ilimitadas com bissetores ilimitados



(2D)

Diagrama de Voronoi Vor(P)

- Células de Voronoi tem faces de dimensões distintas
- Em duas dimensões uma k-face tem 3-k interseções (checar!)
- Um vértice de Voronoi em situação geral é equidistante a 3 sítios
- Uma aresta de Voronoi é equidistante a 2 sítios



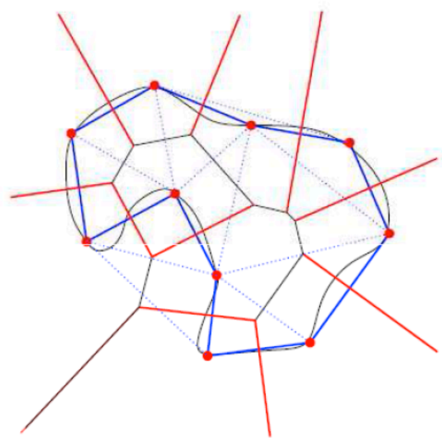
(2D)

Um conjunto de pontos P em R^d é genérico se o fecho afim de k pontos $1 \leq k \leq d$ é homeomórfico a R^{k-1} e nenhum subconjunto de d+2 pontos é coesférico

Remalhamento

Triangulação de Delaunay Del(P)

- Uma triangulação de Delaunay de um conjunto de sítios P é um complexo simplicial tal que k+1 pontos forma um simplexo de Delaunay se suas células de Voronoi tem intersecões não vazias
  - Simplexos de Delaunay são duais à faces de regiões de Voronoi

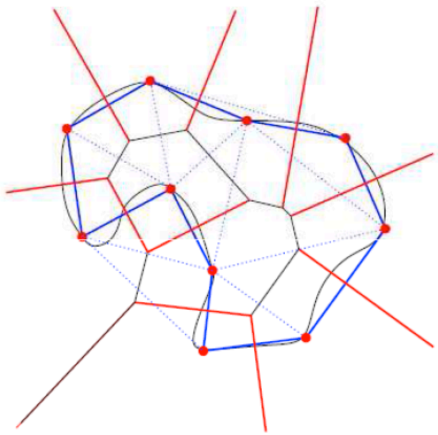


(2D)

Remalhamento

Triangulação de Delaunay Del(P)

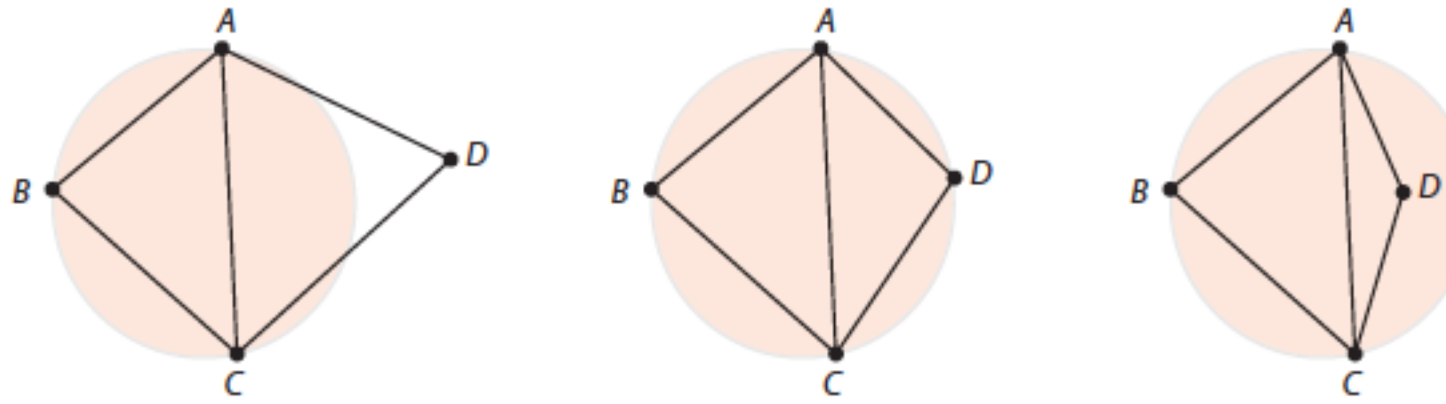
- Em 2D um triângulo de Delaunay (p,q,r) é dual ao Vértice de Voronoi interseção de V(p), V(q) e V(r)
- Uma aresta de Delaunay (p,q) é dual a uma aresta de Voronoi onde V(p) e V(q) se encontram
- Cada vértice p de Delaunay é dual a uma face de Voronoi V(p)



(2D)

Propriedades da Triangulação de Delaunay Del(P)

- Propriedade da esfera (círculo em 2D) vazia: uma triangulação T de um conjunto de pontos P, tal que todo d-simplexo de T admite uma circum-esfera que não contém nenhum ponto de P é uma triangulação de Delaunay



Propriedades da Triangulação de Delaunay Del(P)

- Triangulações de Delaunay 2D maximiza o menor ângulo dos triângulos
- Propriedade Global: uma triangulação de Delaunay é a que possui sequencia angular (sequencia ordenada de todos os ângulos de todos os triângulos) maximal no sentido de ordenação lexicográfica

$$\left(20^\circ,30^\circ,45^\circ,65^\circ,70^\circ,130^\circ\right) > \left(20^\circ,30^\circ,45^\circ,60^\circ,70^\circ,130^\circ\right)$$

Remalhamento

Triangulação de Delaunay Del(P)

Seja P = {p_1,...,p_n} um conjunto de pontos no R^d.
Associamos a cada sítio p_i sua região de Voronoi V(p_i) tal que:

$$V(p_i) = \{x \in R^d : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j \neq i\}$$

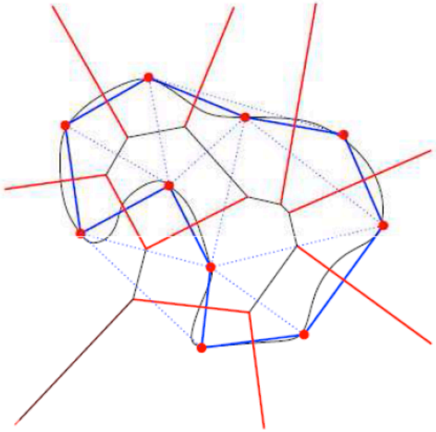
A coleção das regiões não vazias de Voronoi, juntamente com suas faces e relações de incidência determinam um complexo celular denominado diagrama de Voronoi Vor (P)

O Diagrama de Voronoi determina uma partição do R^d

Remalhamento

Triangulação de Delaunay Restrita $Del_{|S}(P)$

Seja X um subconjunto do R^d e P um conjunto de pontos de R^d e $Del(P)$ a triangulação deDelaunay de P. A triangulação de Delaunay Restrita $Del_{|S}(P)$ de X é o subcomplexo de $Del(P)$ cujas faces de Voronoi intersectam X



(2D)

Remalhamento

Remalhamento baseado em triângulos

Uma malha isotrópica possui todos os triângulos bem formados

Pode-se além disso incluir outros critérios como: densidade uniforme e transição suave entre tamanhos

Prima por elementos bem formados

Visa estabilidade e eficiência em simulações

Remalhamento

Algoritmos para remalhamento isotrópico

Remalhamento Guloso (Greedy Remeshing)
Variacional
Incremetal

Remalhamento

Greedy Remeshing (Boissonnat e Oudot 2005)

Baseado em refinamento e flitragem de triangulações de Delaunay 3D

Em cada passo de refinamento um ponto é tomado da superfície de entrada S e inserido na triangulação

Ponto escolhido é computado pela interseção da superfície S com uma aresta do diagrama de Voronoi

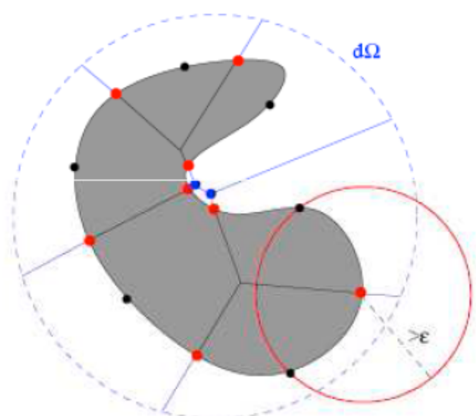
A filtragem consiste em atualizar a triangulação de Delaunay restrita a S

Remalhamento

Greedy Remeshing (Boissonnat e Oudot 2005)

Definição (Bola de Delaunay de Superfície – *Surface Delaunay Ball*): bola centrada na superfície de entrada S que circunscreve uma face f de $Del_{|S}(P)$

Existem várias bolas de Delaunay de Superfície $B_f = B(c_f, r_f)$ parametrizadas pelo centroide c_f e raio r_f.



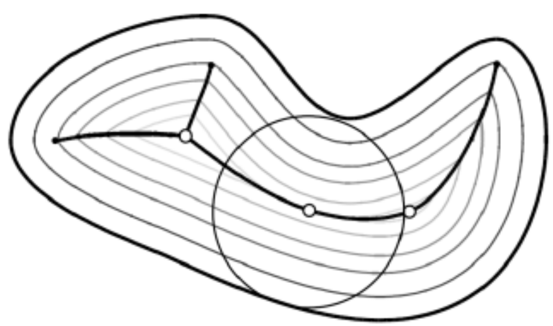
Remalhamento

Greedy Remeshing (Boissonnat e Oudot 2005)

Definição (Eixo medial): Seja O um conjunto aberto do R^d. O eixo medial M(O) de O é o fecho do conjunto de pontos com pelo menos dois pontos mais próximos da fronteira de O

Definição(Bola Medial): bola centrada no eixo medial, com interior em O e cuja esfera limitante toca a fronteira de O

Definição (Alcance ou Local feature Size): o alcance ρ (x) de um ponto x de O é a distância de x ao eixo medial



Greedy Remeshing (Boissonnat e Oudot 2005)

Definição(Face Ruim): Seja $B_f=(c_f,r_f)$ um bola de Delaunay de Superfície de uma face f de $Del_{|S}(P)$. Considera-se que f seja uma face ruim se $r_f>\varphi(c_f)$ com $\varphi(x) \geq \varphi_{inf} > 0$, $\forall x \in S$

$$\varphi(x) = \varepsilon.\rho(x)$$

Ideia do algoritmo: refinar $Del_{|S}(P)$ até que as bolas de Delaunay de Superfície tenham raios menores que uma fração do alcance

A terminação do algoritmo requer que a superfície seja $C^{1,1}$, isto é, possua uma normal em cada ponto e o campo de normais seja Lipshitz.

Remalhamento

Greedy Remeshing (Boissonnat e Oudot 2005)

Manutenção do algoritmo: matém P, $Del(P)$, $Del_{|S}(P)$ e uma lista de faces ruins L

```
refine()
  while L is not empty
    pop one bad facet f from L
    c_f = dual(f) ∩ S
    insert c_f to P
    update Del(P)
    update Del_S(P)
    update L, i.e.,
      remove facets of L that are no longer facets of Del_S(P)
      add new bad facets of Del_S(P) to L
```

Remalhamento

Greedy Remeshing Algorithm

Propriedades:

Converge quando ε=0.2 após um número finito de passos

A saída $Del_{|S}(P)$ é homeomórfica a superfície S

Aproxima S em termos de distância de Hausdorff, normais, curvatura e área

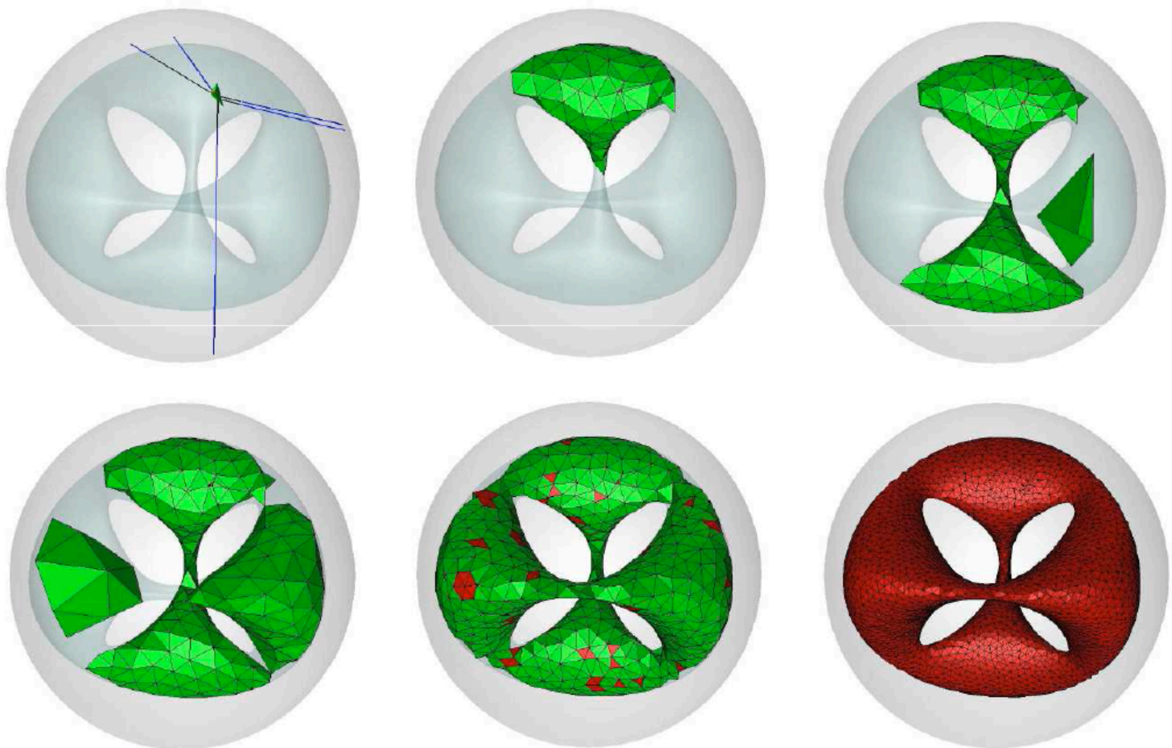
Não produz autointerseções (Triangulação de Delaunay)

Não requer parametrização global

Todos os ângulos dos triâgulos são limitados proporcionando processamento geométrico confiável e simulações fidedignas

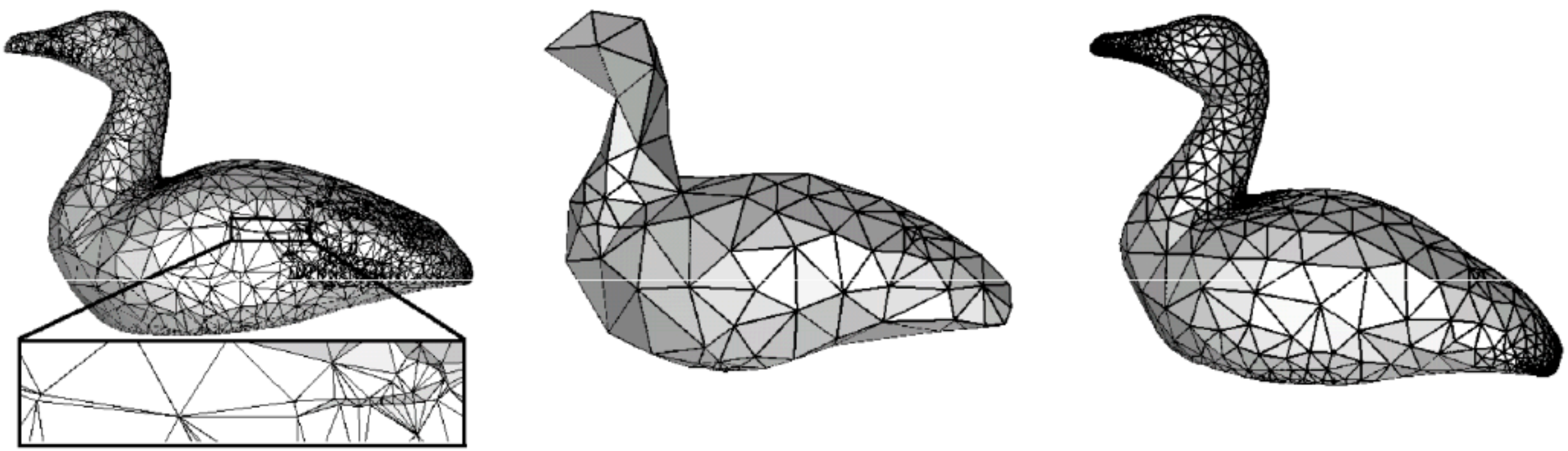
Remalhamento

Greedy Remeshing Algorithm



Remalhamento

Greedy Remeshing Algorithm



Algoritmo Variacional

Usa otimização para obter malhas de alta qualidade

Difícil especificar o critério de otimização (tamanho e forma dos triângulos) e quais graus de liberdade explorar (posição (contínuo) e topologia combinatória(discreto))

A abordagem variacional requer a especificação de uma energia e um resolvedor

Difícil especificar uma energia que possa ser minimizada e que leve a um ótimo global

Remalhamento

Algoritmo Variacional

Fato em 2D: amostragens isotrópicas levam a triângulos bem formados (Eppstein 2001)

Ideia: distribuir pontos igualmente sobre um espaço de dimensões contruindo o Diagrama de Voronoi Centroidal (Du et al 99)

Remalhamento

Diagrama de Voronoi Centroidal

Definição (Diagrama de Voronoi Centroidal): dado um domínio Ω e uma função de densidade ρ(x), x E Ω, um diagrama de Voronoi Centroidal é uma classe de diagramas de Voronoi onde cada sítio coincide com o centróide c_i de uma região de Voronoi V_i

$$c_i = \frac{\int_{x \in V_i} x\rho(x)\,dx}{\int_{x \in V_i} \rho(x)\,dx}$$

- Funcional de energia abaixo é minimizado quando p são os centroids c_i

$$E(p_0,\ldots,p_n,V_0,\ldots,V_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \rho(x) \left\| x - p_i \right\|^2 dx$$

Remalhamento

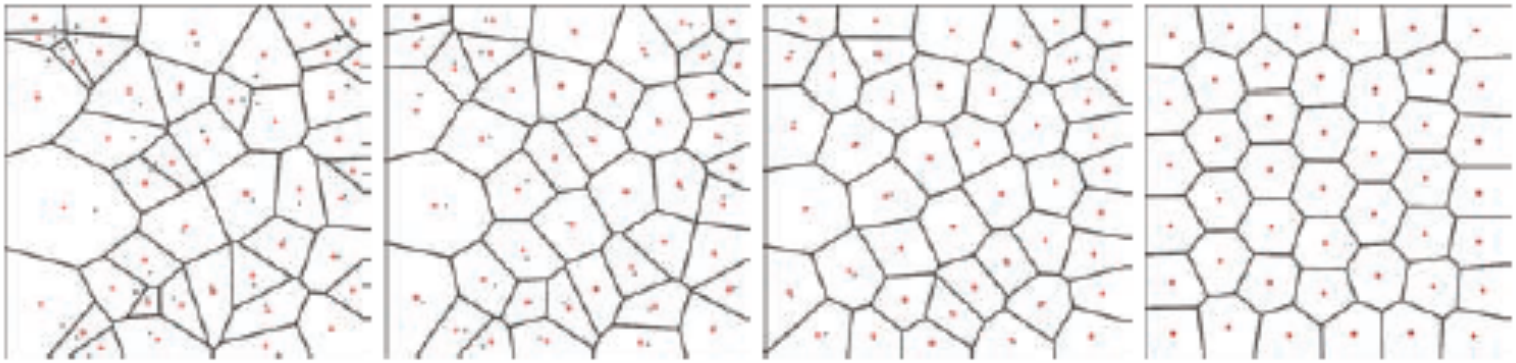
Algoritmo de LLoyd

1- Construir o diagrama de Voronoi de dos sítios p_i em P
2- Computar os centroides c_i de cada região de Voronoi V_i
3- Mover os sítios p_i para c_i e repetir os passos
1,2 e 3 até covergência

$$c_i = \frac{\int_{x \in V_i} x\rho(x)}{\int_{x \in V_i} \rho(x)}$$

Remalhamento

Diagrama de Voronoi Centroidal



Remalhamento

Remeshing Variacional (Alliez et al 2006)

1. Algoritmo calcula uma parametrização confome (Desbrun et al)
2. Especifica uma função de densidade para compensar as distorções da parametrização
3. No espaço de parâmetros calcula uma amostragem aleatória com base na distribuição
4. Aplica o alglritmo de Lloyd
5. Levanta as amostras em 2D para a malha 3D

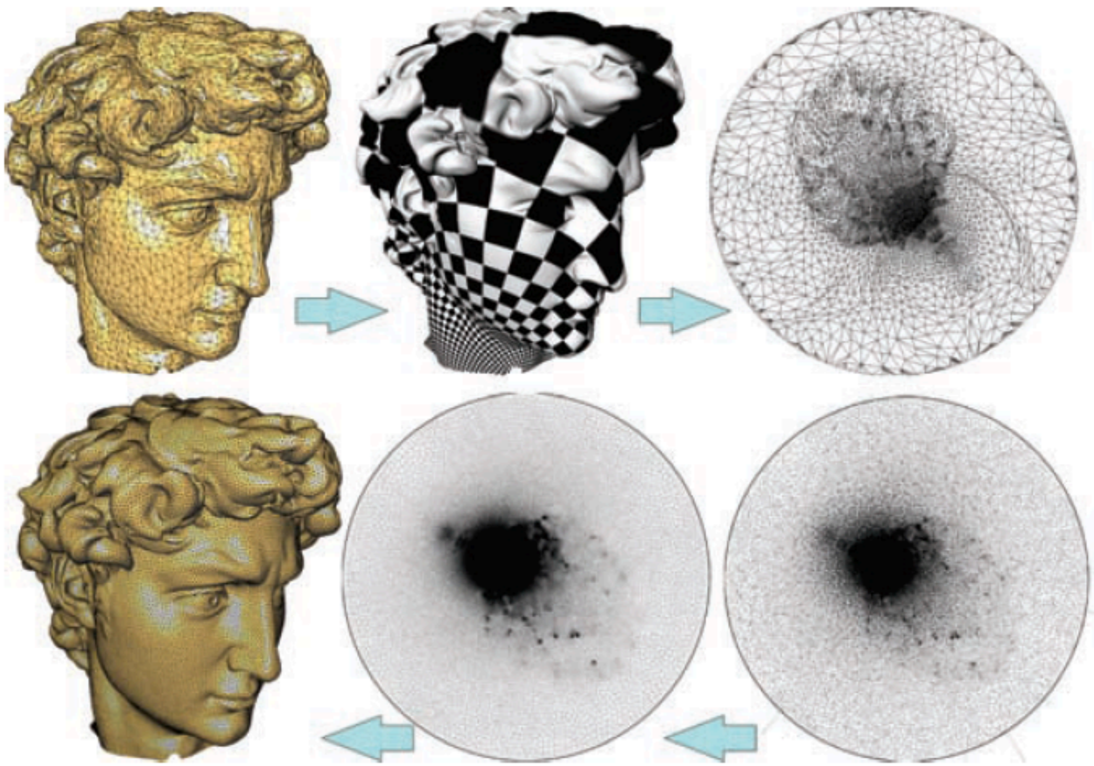
Remalhamento

Remalhamento Variacional (Alliez et al 2006)

```
isotropic_remeshing(input surface triangle mesh M)
  conformal paramerization of M
  compute density function
  perform in parameter space
    random sampling in accordance to the density function
    repeat until convergence
      Voronoi diagram
      relocate sites to Voronoi cell centroids
  lift 2D Delaunay triangulation to 3D
```

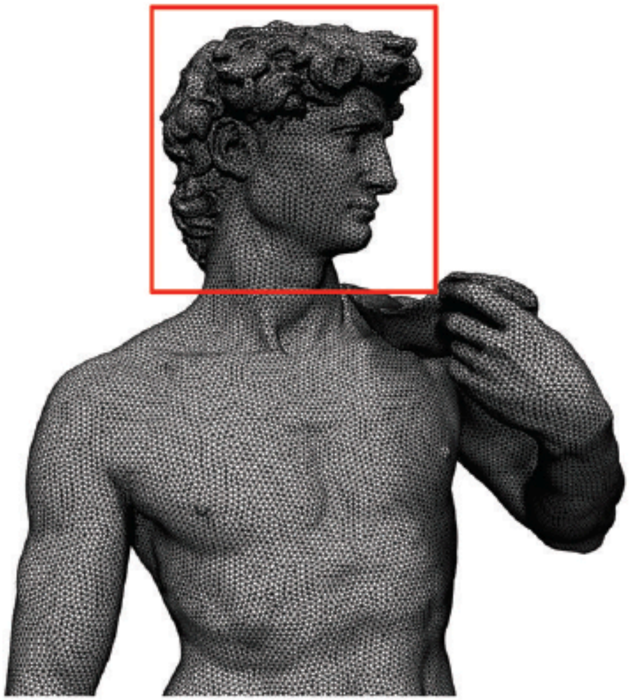
Remalhamento

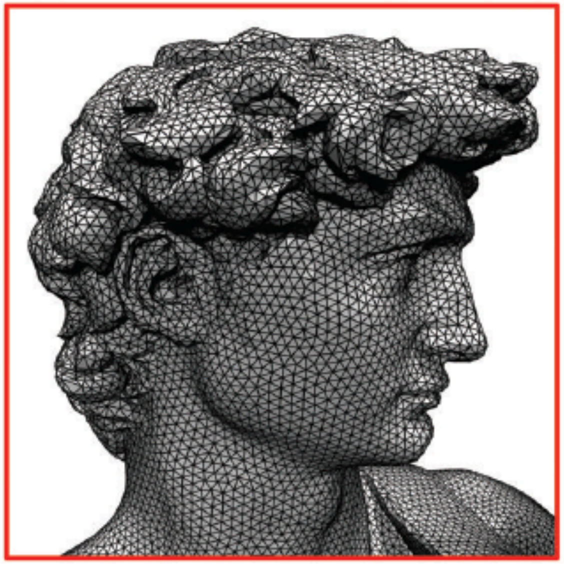
Remeshing Variacional (Alliez et al 2006)



Remalhamento

Remeshing Variacional (Alliez et al 2006)





Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- Algoritmo bastante simples
- Não requer parametrização
- Não requer cálculo de células geodésicas

Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- O algoritmo recebe como entrada um tamanho alvo de aresta e subdivide arestas grandes, colapsa arestas pequenas e reposiciona vértices até que todas as arestas alcancem o tamanho alvo

```
remesh(target_edge_length)
  low = 4/5 * target_edge_length
  high = 4/3 * target_edge_length
  for i = 0 to 10 do
    split_long_edges(high)
    collapse_short_edges(low,high)
    equalize_valences()
    tangential_relaxation()
    project_to_surface()
```

Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- A escolha das constantes é que garante a convergência do método

```
remesh(target_edge_length)
  low = 4/5 * target_edge_length
  high = 4/3 * target_edge_length
  for i = 0 to 10 do
    split_long_edges(high)
    collapse_short_edges(low,high)
    equalize_valences()
    tangential_relaxation()
    project_to_surface()
```

Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- Subdivisão de arestas longas

```
split_long_edges(high)
  while exists edge e with length(e) > high do
    split e at midpoint(e)
```

Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- Colapso de arestas pequenas
- Deve ser feito com cautela. Ao colapsar cadeias longas pode-se desfazer o trabalho feito pela etapa split_long_edges(high)
- Deve-se testar antes do colapso se alguma aresta se tornará mais comprida que o parâmetro high

Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

```
collapse_short_edges(low, high)
  while exists edge e with length(e) < low do
    let e = (a,b) and let a[1],...,a[n] be the one-ring of a
    collapse_ok = true
    for i = 1 to n do
      if length(b,a[i]) > high then
        collapse_ok = false
    if collapse_ok then
      collapse a into b along e
```

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- Equalização de valências: procura uniformizar as valências efetuando *edge flips*

```
equalize_valences()
  for each edge e do
    let a, b, c, d be the vertices of the two triangles adjacent to e
    deviation_pre = abs(valence(a)-target_val(a))
                  + abs(valence(b)-target_val(b))
                  + abs(valence(c)-target_val(c))
                  + abs(valence(d)-target_val(d))
    flip(e)
    deviation_post = abs(valence(a)-target_val(a))
                  + abs(valence(b)-target_val(b))
                  + abs(valence(c)-target_val(c))
                  + abs(valence(d)-target_val(d))
    if deviation_pre ≤ deviation_post do
      flip(e)
```

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- Relaxação tangencial

- Aplica o algoritmo de suavização por difusão

$$q = \frac{1}{\left|N_1(p)\right|} \sum_{p_j \in N_1(p)} p_j$$

- Projeta o vértice resultante p no plano tangente gerando uma nova posição p’

$$p' = q + nn^T(p - q)$$

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

```
tangential_relaxation()
  for each vertex v do
    q[v] = the barycenter of v's neighbor vertices
  for each vertex v do
    let p[v] and n[v] be the position and normal of v, respectively
    p[v] = q[v] + dot(n[v],(p[v] − q[v])) * n[v]
```

Remalhamento

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- É possível preservar features que tenham sido detectadas ou marcadas pelo usuário
- Cantos (corners) com mais de duas ou exatamente uma aresta feature incidente devem ser preservadas e devem ser excluídas de toda operação topológica
- Vértices feature podem somente ser colapsados ao longo da aresta feature incidente
- Subdividir uma aresta feature cria duas novas arestas feature e um vértice feature
- Arestas feature não devem nunca sofrer flips
- Suavização tangente de vértices feature são restritos a suavização ao longo das linhas de features (é univariada)

Remalhamento Incremental (Botch e Kobbelt 2004)

- É possível preservar features que tenham sido detectadas ou marcadas pelo usuário
- Cantos (corners) com mais de duas ou exatamente uma aresta feature incidente devem ser preservadas e devem ser excluídas de toda operação topológica
- Vértices feature podem somente ser colapsados ao longo da aresta feature incidente
- Subdividir uma aresta feature cria duas novas arestas feature e um vértice feature
- Arestas feature não devem nunca sofrer flips
- Suavização tangente de vértices feature são restritos a suavização ao longo das linhas de features (é univariada)

Remalhamento

Como detectar features em uma malha

- Usar tensores votantes (voting tensors)

- Um tensor votante $T(v_i)$ é computado como a soma ponderada das matrizes de covariância das normais $n(v_i)$

$$T(v_i) = \sum_{t_j \in N_t(v_i)} \mu_j n_{t_j} n_{t_j}^T,$$

Os pesos μ_j são dados por

$$\mu_j = \frac{area(t_j)}{area_{max}} exp\left(-\frac{\|c_j - v_i\|}{\|c_j - v_i\|_{max}}\right)$$

Onde $area_{max}$ é a maior área entre os triângulos e c_j é o baricentro do triangulo t_j

Como detectar features em uma malha

- Finalmente calcula-se os autovalores λ_0, λ_1 e λ_2, normalizados para o intervalo [0,1], da matriz associada ao tensor $T(v_i)$ e classifica-se v_i conforme a seguinte regra:

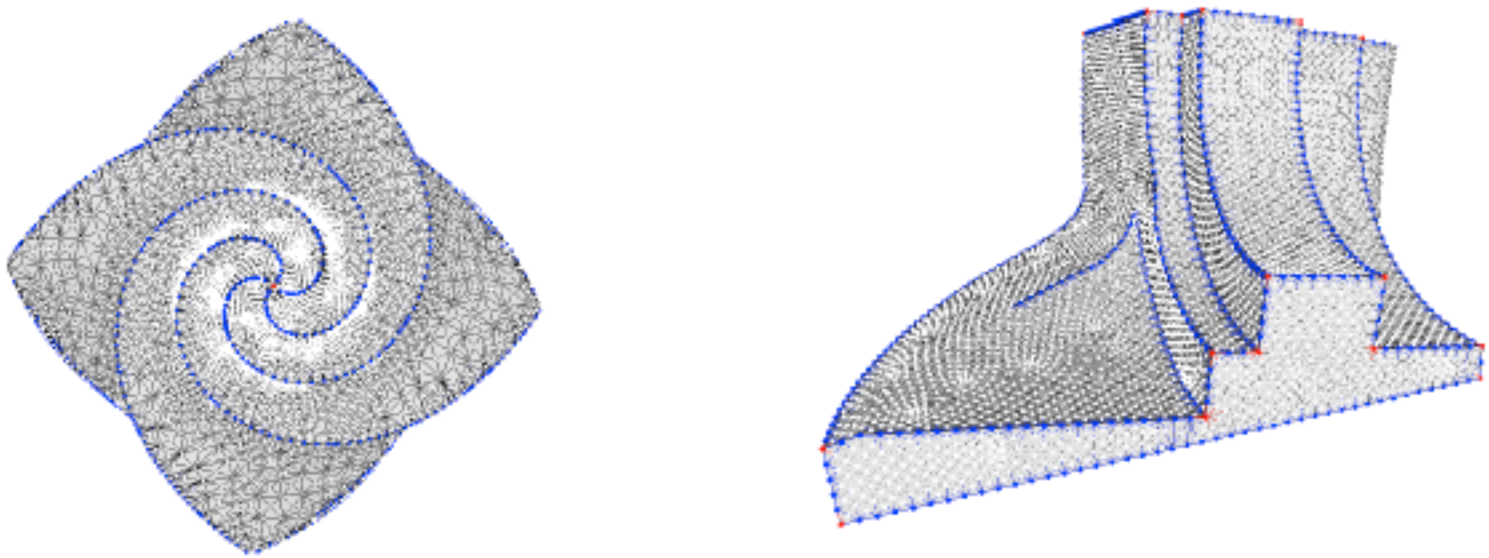
```
for All vertices v_i do
    if λ3 > 0.1 then
        Mark v_i as corner vertex;
    end
    if λ2 < 0.02 then
        Mark v_i as face vertex;
    end
    if λ2 > 0.1 && λ3 < 0.02 then
        Mark v_i as strong-edge vertex;
    end
    if (λ2 ≥ 0.02 && λ2 ≤ 0.1) && λ3 < 0.02 && NVC then
        Mark v_i as weak-feature vertex;
    end
end
```

Algorithm 1: Vertex type classification

Como detectar features em uma malha

- Critério NVC (Wang) separa vértices de arestas fracas de vértices ruidosos
- Utiliza o conceito de direção principal de difusão : autovetor associado ao menor autovalor
- Dado um vértice v_i, busca-se em seus vizinhos, que não sejam da mesma face, elementos que tenham vetores de direção principal de difusão semelhantes
- Seja d o vetor de direção de difusão principal de v_i e d' o vetor de difusão principal de um vizinho não face de v_i
  - Se $\angle(d,d') < 15^\circ$ considera-se d e d' semelhantes
- O critério NVC(v_i) é satisfeito se houverem duas ocorrências de vetores de difusão semelhantes entre vizinhos não face de v_i

Como detectar features em uma malha



(a) (b)

Remalhamento

Como detectar features em uma malha